NOTICE

SUR LES

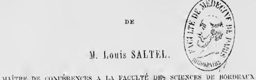
TRAVAUX MATHÉMATIQUES

DE



M. Louis SALTEL.

MAÎTRE DE CONFÉRENCES A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE BORDEAUX.



« Celui qui ne connaît pas les tourments de l'inconnu doit ignorer les joies de la découverte, qui sont certainement les plus vives que l'esprit de l'homme puisse jamais ressentir. »

CLAUDE BERNARD. — *Introduction à l'étude de la médecine expérimentale.*

« Un géomètre ne doit pas être moins glorieux d'avoir donné son nom à une courbe, qu'un prince d'avoir donné le sien à une ville. » — FONTENELLE.

BORDEAUX

IMPRIMERIE DE MIOCQUE-BALARAC, RUE D'ALBRET, 26.

1884

AVERTISSEMENT

Pour des motifs sur lesquels il est inutile d'insister ici, j'ai souvent publié, sur un même sujet, à des époques assez éloignées et dans un enchaînement irrégulier, bon nombre de Mémoires qui auraient dû, suivant la bonne logique, former un tout continu et irréductible.

Cette trop regrettable confusion m'a contraint, dans l'exposé que je vais présenter de mes recherches, à ne pas suivre l'ordre chronologique rigoureux, mais bien l'ordre didactique (*) adopté dans mes Conférences de Géométrie supérieure faites à la Faculté des sciences de Bordeaux.

Faute de pouvoir présenter sur certaines questions (**) une analyse assez sommaire pour l'étendue d'une notice, nous nous sommes borné à en transcrire uniquement les titres avec la date précise de leur publication.

DIVISION DU MÉMOIRE

CHAPITRE Ier. — Des méthodes analytiques.

CHAPITRE IIe. — Des méthodes de géométrie pure.

CHAPITRE IIIe. — Recherches diverses. — Énoncés des travaux par ordre chronologique. — Addition.

Nota. — **La présente publication étant faite dans le but de porter notre candidature à la place laissée vacante par M. Chasles à l'Académie des sciences de Paris et à l'Académie royale de Belgique, nous avons hâte de rappeler que toutes nos recherches ont été surtout inspirées par l'étude approfondie des travaux de cet immortel Géomètre.**

Bordeaux, ce 28 Décembre 1880.

(*) Pour ce motif nous avons dû mentionner certains travaux non encore publiés.

(**) Nous attachons cependant grand prix à plusieurs de ces questions.

[illegible] la Société des [illegible]
[illegible] ordinaire des [illegible]
[illegible] 1876 des publications de [illegible]

[illegible] se [illegible] applique [illegible] fit en quelque sorte [illegible] ligues peut pourtant [illegible] applique à [illegible] de compléments [illegible] peut même ajouter que [illegible] suggère immédiatement une [illegible] aussi facilement. C'est ainsi que l'on [illegible] considérant dans les problèmes [illegible] une relation quelconque entre [illegible] relation quelconque entre [illegible] relation quelconque entre [illegible] supposant [illegible]

NOTICE

SUR LES

TRAVAUX MATHÉMATIQUES

CHAPITRE Ier

Des méthodes analytiques.

I

ANALYSE DES TRAVAUX DE PONCELET SUR LE PRINCIPE DE CONTINUITÉ.

(Ce travail est sous presse.)

II

DE LA MÉTHODE DE CORRESPONDANCE ANALYTIQUE.

Nous avons donné le nom de *Méthode de correspondance analytique* à l'application, à diverses questions de géométrie et d'algèbre, de deux théorèmes qui ont reçu les noms de *Principe de correspondance analytique* et de *Principe de correspondance géométrique entre K series de points.*

Dans cette méthode, et c'est là son caractère le plus précieux, on supprime les *éliminations* et l'on se borne *à regarder* les équations.

Il serait difficile de faire même sommairement une analyse de nos nombreuses communication sur ce nouveau procédé. sans être obligé de reproduire *in extenso* un petit travail de 30 pages publié dans le tome IV (2e série) des *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux.* Pour ce motif, je me bornerai à reproduire des observations extraites d'un autre mémoire inséré au numéro d'août 1876 des *Bulletins de l'Académie royale de Belgique :*

« Les deux problèmes que nous venons de traiter (*) suffisent, croyons-nous, pour bien » mettre en évidence l'extrême facilité avec laquelle s'applique la méthode que nous venons » d'exposer. Cette facilité est telle, en effet, qu'il suffit, en quelque sorte, de *regarder* les équa- » tions, comme en géometrie pure on contemple les figures, pour pouvoir donner sur le champ » la réponse à la question proposée. Il y a plus : notre méthode appliquée à une question très- » générale ne demande pas habituellement plus de développements pour ce cas le plus géné- » ral que pour le plus simple des cas particuliers. On peut même ajouter que cette pure ins- » pection des données à laquelle on se borne, suggère immédiatement une foule d'autres » questions que l'on doit pouvoir résoudre tout aussi facilement. C'est ainsi que l'on déter- » mine sans peine les degrés des lieux obtenus en considérant dans les problèmes précédents :

» 1° K courbes au lieu de trois ; 2° en supposant une relation *quelconque* entre les longueurs » des tangentes ou des normales ; 3° en supposant une relation *quelconque* entre les coefficients » angulaires des tangentes ; 4° en établissant une relation *quelconque* entre les coordonnées » des points de contact. Par exemple, pour deux courbes, en supposant la distance constante ;

(*) Voici les énoncés de ces deux problèmes :

1° *On a dans un plan trois courbes* S_1, S_2, S_3, *les plus générales d'ordres* m_1, m_2, m_3. *On demande l'ordre du lieu d'un point M tel que menant de ce point les tangentes à chacune de ces courbes, il y en ait au moins trois, appartenant respectivement à chacune de ces trois courbes, telles que la somme des carrés de leurs longueurs soit constante.*

2° *On a dans un plan trois courbes* S_1, S_2, S_3. *les plus générales d'ordres* m_1, m_2, m_3. *On demande l'ordre du lieu d'un point M tel que menant de ce point les normales à chacune de ces courbes, il y en ait au moins trois, appartenant respectivement à chacune de ces courbes, telles que la somme des carrés de leurs longueurs soit constante.*

» pour trois courbes, en supposant que le triangle formé par les trois points de contact soit » rectangle, soit isoscèle, ait un périmètre constant, ait une aire constante, ait une aire nulle, » etc., etc. ; pour quatre courbes, en demandant que les quatre points de contact soient sur » cercle. etc., etc. »

III

LOI DE GÉNÉRATION.

Dans toutes les parties des sciences, on se propose de ramener à un petit nombre de principes ou de lois toutes les vérités déjà connues. Voici, au sujet de la génération d'un lieu engendré par le croisement simultané de k courbes ou surfaces, l'énoncé d'une loi dont la fécondité est, pour ainsi dire, inépuisable dans les recherches de géométrie pure :

Loi de génération. — *1° Pour que k courbes ou surfaces variables, de position et de forme suivant des lois déterminées, engendrent un lieu géométrique, résultant de l'ensemble des points du plan ou de l'espace où se croisent k courbes ou surfaces correspondantes, il faut et il suffit que $k-1$ d'entre elles étant assujetties à passer respectivement par $k-1$ points arbitraires, la dernière se trouve par là même déterminée ; 2° ces courbes ou surfaces en se mouvant déterminent toujours, sur une droite arbitraire, k séries de points, dont les points de coïncidence représentent les points communs à la droite et au lieu.*

Importance du Principe de correspondance géométrique entre k séries de points mise en évidence par la loi de génération (*). — Puisque tout lieu géométrique donne naissance, sur une droite arbitraire, à k séries de points, dont les points de coïncidence sont les points communs à la droite et au lieu, on comprend tout de suite l'importance du Principe de correspondance géométrique entre k séries de points, puisqu'il indique un moyen, *purement géométrique*, fort général, pour déterminer ce nombre de coïncidences, c'est-à-dire l'ordre du lieu. Si l'on se reporte, en effet, à l'énoncé de ce Principe, il conduit immédiatement à cette conclusion :

Conclusion. — Si un lieu est défini par la variation de k courbes ou surfaces $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_i, \ldots, A_k$, on saura déterminer son ordre toutes les fois :

1° *Que l'on connaîtra le nombre de courbes ou surfaces A_i obtenues en assujettissant les autres $A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_k$ à passer respectivement par l'un des $k-1$ points arbitraires $P_1, P_2, \ldots, P_{i-1}, P_{i+1}, \ldots, P_k$;*

2° *Qu'il existera une droite Δ qui ne soit pas direction assymptotique commune à un même groupe de k courbes ou surfaces correspondantes.*

Exemples géométriques d'un lieu engendré par k *courbes, et construction, par points, de ces lieux.* — Nous croyons devoir reproduire ici textuellement une note historique extraite de notre Mémoire *sur la détermination, sans calcul, de l'ordre d'un lieu géométrique :*

« Nous ne savons pas si la génération d'un lieu défini par les points communs à k courbes » variables, bien familière lorsque les courbes sont représentées par des équations, a été déjà » signalée lorsque les courbes sont définies par des conditions géométriques ; quant à nous, » nous croyons pouvoir dire que, soit dans nos excellents cours de mathématiques spéciales (**) » soit dans nos lectures, nous n'avions jamais vu qu'il fût question d'un lieu engendré par k » courbes, même pour le cas de $k = 3$; dans le courant de ce Mémoire (pp. 18-24), nous ferons » voir qu'il n'est pas difficile d'imaginer de pareilles courbes, et nous indiquerons même » (pp. 24-25) un procédé graphique de description, description nécessairement plus compli-

(*) C'est précisément l'observation de cette loi, non encore observée, qui nous a naturellement conduit à énoncer le Principe en question (voir p. 10-12 de nos *Considérations générales sur l'ordre d'un lieu géométrique.*)

(**) Qu'il me soit particulièrement permis de rappeler ici les noms de mes anciens professeurs, MM. Vaseille et Hauser dont l'appui m'a été si utile dans des circonstances difficiles.

» quée que dans la cas de $k = 2$, puisque, *en général*, k *courbes correspondantes ne donnent* » *pas des points du lieu.* »

Nota. — Pour les applications, nous renvoyons le lecteur à nos Mémoires : 1° *Considérations générales sur la détermination, sans calcul, de l'ordre d'un lieu géométrique*; 2° *Mélanges de géométrie supérieure*; 3° *Compte rendu* du 29 novembre 1875, p. 1047.

IV

MÉTHODE POUR LEVER L'INDÉTERMINATION, RÉSULTANT D'UN NOMBRE INFINI DE SOLUTIONS COMMUNES, DANS DIVERS SYSTÈMES D'ÉQUATIONS.

Il suffira de présenter un seul exemple; on se rendra compte, sans peine, de l'entière généralité de la méthode suivie.

Problème. — *Étant donné le système d'équations*

$$\left\{\begin{array}{llll} U_1(x, y, \alpha, \beta, \gamma) = 0\ (1), & U_2(x, y, \alpha, \beta, \gamma) = 0\ (3), & U_3(x, y, \alpha, \beta, \gamma) = 0\ (5) & U_4(x, y, \alpha, \beta, \gamma) = 0\ (7) \\ U_1(x, y, \alpha', \beta', \gamma') = 0\ (2), & U_2(x, y, \alpha', \beta', \gamma') = 0\ (4), & U_3(x, y, \alpha', \beta', \gamma') = 0\ (6) & U_4(x, y, \alpha', \beta', \gamma') = 0\ (8) \end{array}\right.$$

à 8 inconnues $x, y, \alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$; *on demande de supprimer les solutions, en nombre infini, résultant de la triple hypothèse.*

$$\alpha = \alpha', \quad \beta = \beta', \quad \gamma = \gamma'.$$

Solution. — Il suffit de substituer aux inconnues α' β' les inconnues b' c' définies par

$$\beta' = b'(\alpha - \alpha') + \beta,$$
$$\gamma' = c'(\alpha - \alpha') + \gamma,$$

et de retrancher les équations (1 et 2), (3 et 4), (5 et 6), (7 et 8). En divisant par $\alpha - \alpha'$ les premiers membres des quatre nouvelles équations ainsi obtenues et les associant aux équations (1, 3, 5, 7) on a huit équations déterminant un nombre fini de solutions en $x, y, \alpha, \beta, \gamma, \alpha', b', c'$.

Nota. — Nous trouverons dans la suite de nombreuses applications de cette méthode; pour le moment, je me bornerai à rappeler qu'elle donne une solution simple de ces deux problèmes importants :

1° *Trouver les conditions pour que* k *équations à une inconnue aient* h *solutions communes distinctes;*

2° *Étant donné un système de* k *équations à* k *inconnues, trouver les conditions pour qu'il y ait :* h_2 *solutions doubles distinctes;* h_3 *solutions triples distinctes;* h_4 *solutions quadruples distinctes, etc.*

V

EXTENSION DU THÉORÈME DES FONCTIONS HOMOGÈNES A UN NOMBRE QUELCONQUE D'ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES ENTIÈRES ET RATIONNELLES.

Il suffira encore d'indiquer cette extension sur un seul exemple. Si l'on a, par exemple, les trois équations

$$\left\{\begin{array}{l} U_1(x, y, a_1, a_2) = 0 \\ U_2(x, y, a_1, a_2) = 0 \\ U_3(x, y, a_1, a_2) = 0 \end{array}\right.$$

on en déduit, en les rendant homogènes en x, y, a_1, a_2, t, l'identité :

$$x \begin{vmatrix} \frac{dU_1}{dx}, & \frac{dU_1}{da_1}, & \frac{dU_1}{da_2} \\ \cdots, & \cdots, & \cdots \\ \cdots, & \cdots, & \cdots \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} \frac{dU_1}{dy}, & \frac{dU_1}{da_1}, & \frac{dU_1}{da_2} \\ \cdots, & \cdots, & \cdots \\ \cdots, & \cdots, & \cdots \end{vmatrix} + t \begin{vmatrix} \frac{dU_1}{dt}, & \frac{dU_1}{da_1}, & \frac{dU_1}{da_2} \\ \cdots, & \cdots, & \cdots \\ \cdots, & \cdots, & \cdots \end{vmatrix} = 0$$

Nota. — Plus généralement nous avons observé dans un grand nombre de cas cette importante loi :

Les coefficients de x, y, t de cette identité jouent le même rôle, relativement aux trois équations proposées, que les dérivées partielles d'une seule équation en x, y, t, prises successivement par rapport à chacune de ces variables.

VI.

DIRECTION NOUVELLE A SUIVRE DANS LA RECHERCHE ANALYTIQUE DES PROPRIÉTÉS DES COURBES. — MÉTHODE GÉNÉRALE POUR DÉTERMINER LES SINGULARITÉS ORDINAIRES D'UN LIEU DÉFINI PAR DES CONDITIONS ALGÉBRIQUES.

Les anciens étudiaient les courbes sans établir de liens entre elles ; aussi, pour l'étude d'une courbe nouvelle, avaient-ils toujours devant eux de nouvelles difficultés. Bien que, par exemple, on sût trouver les tangentes aux *coniques*, on ne pouvait déterminer par là même les tangentes à la *conchoïde*.

D'où provenait cette multiplicité de méthodes ?

Evidemment, ces courbes manquaient d'une définition ou propriété générale commune, susceptible de comprendre toutes les autres. Si, pour la trouver, des siècles n'ont pu suffire, qui eût osé provoquer cette question infiniment plus générale :

Trouver une définition commune à toutes les courbes?

Il n'a rien moins fallu que le génie de Descartes pour y répondre affirmativement.

L'illustre philosophe remarqua, en effet, on le sait, la nécessité d'une relation constante

$$f(x, y) = 0$$

entre l'abscisse et l'ordonnée d'une courbe arbitraire, relation suffisante pour la définir.

Ce fut là l'une des découvertes les plus célèbres que la science ait enregistrée dans ses annales, et l'idée géométrique la plus féconde qu'eût jamais conçue l'esprit humain. Désormais, toute la géométrie était, en quelque sorte, condensée dans ces deux questions fondamentales :

1° *Étant donnée l'équation d'une courbe, en conclure la forme et les propriétés de celle-ci;*

2° *Inversement, étant donnée une propriété ou définition géométrique d'une courbe, trouver l'équation de la courbe.*

C'est effectivement ce mode de solution *théoriquement* général qui a été suivi jusqu'ici dans la démonstration analytique des propriétés des courbes (*).

On a vu pourtant (exposé de la *Méthode de correspondance analytique*), la possibilité de déterminer l'ordre d'un lieu géométrique, défini par des conditions algébriques, sans recourir à *l'équation* de ce lieu, c'est-à-dire sans effectuer d'éliminations. Nous avons vu aussi combien sont nombreux les lieux dont on ne peut *pratiquement* obtenir l'équation.

Dès lors, on se rend compte, sans peine, de toute l'importance que devait acquérir une nouvelle méthode permettant de substituer aux deux questions fondamentales que nous venons d'énoncer les suivantes :

1° *Une courbe étant définie par k équations algébriques, en conclure ses propriétés par la simple inspection de ces équations;*

2° *Pour trouver les propriétés d'une courbe, se borner à traduire algébriquement les conditions qui la définissent.*

Nous avons développé ce procédé si désiré dans le Mémoire : *Historique et développement d'une méthode pour déterminer les singularités ordinaires d'un lieu défini par k équations algébriques.*

(*) On peut même dire que les cours de mathématiques spéciales ont actuellement pour objet essentiel de développer ce moyen de solution.

Comme application, nous avons pu résoudre facilement des *milliers* de problèmes (*) qui étaient inattaquables.

VII

CONDITIONS POUR QUE K COURBES OU SURFACES DÉFINIES PAR DES ÉQUATIONS AIENT H POINTS COMMUNS.

Grâce à notre méthode pour lever l'indétermination, dans certains systèmes d'équations, méthode exposée § IV, nous avons pu résoudre facilement ce problème.

Jusqu'ici on s'était borné à considérer un cas particulier de $k = 3$ et $h = 2$; celui qui se présente lorsqu'on se propose de déterminer le nombre de solutions en a, b, pour que la courbe représentée par

$$a V_1 (x, y) + b V_2 (x, y) + V_3 (x, y) = 0$$

possède deux points doubles. — Voir, au sujet de ce simple cas particulier dont la solution a été même pendant longtemps réputée comme fort difficile, une Note historique de M. le vice-amiral de Jonquières, insérée au *Compte rendu* du 28 décembre 1868, dans laquelle le savant géomètre annonce enfin une solution développée dans le journal : *Mathematische Annalen* (1869) (**).

Parmi les conséquences obtenues par la méthode en question, exposée p. 53-57 du mémoire : *Historique et développement d'une méthode*, etc.. nous citerons :

1° *Les foyers d'une courbe peuvent toujours être considérés comme des points doubles d'une courbe correspondante facile à définir;*

2° *Il est facile de trouver le nombre des solutions en* (a, b) *pour lesquelles les quatre surfaces représentées par*

$$(A) \left\{ \begin{array}{l} U_1 (x, y, z, a, b) = 0 \\ U_2 (x, y, z, a, b) = 0 \\ U_3 (x, y, z, a, b) = 0 \\ U_4 (x, y, z, a, b) = 0 \end{array} \right.$$

ont deux points communs distincts (***)

VIII

SUR LA LOI DE DÉCOMPOSITION.

Au sujet de théorèmes concernant les *ordres* et les *classes* des courbes *planes*, M. Chasles, dans une communication faite à l'Académie des sciences de Paris, le 9 août 1875, s'exprimait comme il suit :

« Les questions où entrent des conditions de grandeur de segments rectilignes, traitées jus-
» qu'ici dans la théorie des courbes sont extrêmement rares, même à l'égard des courbes les
» plus simples, les sections coniques. C'est que, indépendamment des difficultés de calcul
» qu'y trouvent les méthodes analytiques, leur solution implique en général la connaissance de
» l'*ordre* et de la *classe* des courbes, et est donc inaccessible à ces méthodes. »

Ainsi, selon M. Chasles, les théorèmes concernant à la fois les *ordres* et les *classes* des courbes *planes* étaient, jusque-là, inaccessibles aux *théories analytiques*.

C'est en cherchant à découvrir les causes de cette impuissance que j'ai rencontré la *loi de décomposition*, loi qui m'a permis, en m'appuyant sur la *méthode de correspondance analyti-*

(*) C'est ainsi, par exemple, que nous avons pu, en particulier, sextupler les nombreux (*plus de mille !*) et intéressants théorèmes donnés, dans ces dernières années, par M. Chasles, dans les *Comptes rendus* de l'Académie des sciences de Paris.

(**) Parmi les autres géomètres qui s'étaient déjà occupés de *cette* question, nous citerons : Steiner, Clebsch, Cremona, Chasles et Cayley.

(***) Si l'on suppose, par exemple, que les quatre équations soient les plus générales d'ordres m_1, m_2, m_3, m_4 par rapport à l'ensemble des lettres x, y, z, a, b, on trouve tout de suite pour le nombre cherché

$$N = \frac{1}{2} m_1, m_2, m_3, m_4 \ (m_1, m_2, m_3, m_4 - m_1 - m_2 - m_3 - m_4 + 8)$$

que de résoudre avec facilité, par une voie purement *algébrique*, le genre de problèmes en question. Mes recherches sur ce sujet ont été publiées, en grande partie, dans les *Bulletins de l'Académie de Belgique*, surtout dans le Mémoire inséré au *Bulletin* du mois d'octobre, 1876.

Voici l'énoncé de la loi en question :

LOI DE DÉCOMPOSITION. — *Tout lieu géométrique, défini par des équations, se décompose en plusieurs autres* (dont on peut toujours trouver *a priori* les équations individuelles), *s'il arrive qu'en faisant passer une ou plusieurs des courbes ou surfaces génératrices de ce lieu par des points arbitraires, il y ait, parmi les diverses solutions correspondantes des paramètres variables, renfermés dans les équations de ces courbes ou surfaces génératrices, un certain nombre d'entre elles qui soient fixes, c'est-à-dire indépendantes des points choisis*

NOTA. — En poursuivant mes études sur la décomposition des lieux géométriques, j'ai été conduit à observer un *Paradoxe mathématique* et de nouveaux *caractères de décomposition* que je vais faire connaître dans les deux paragraphes suivants

IX.

SUR UN PARADOXE MATHÉMATIQUE.

Il arrive, dans une multitude de problèmes, que les équations qui définissent un lieu géométrique ne s'appliquent pas seulement à ce lieu, mais encore à des courbes ou surfaces *étrangères* répondant indirectement à la question,

C'est là une circonstance bien connue qui complique souvent les solutions *analytiques*, sans toutefois les rendre impuissantes à résoudre les problèmes que l'on a en vue.

Voici l'énoncé d'un *paradoxe mathématique*, non remarqué, je crois, qui m'a semblé, assez longtemps, devoir mettre en défaut les méthodes de calcul :

Les coordonnés de tous les points de l'espace peuvent vérifier les équations d'un lieu, bien que, d'après sa définition géométrique, ce lieu se compose uniquement d'une seule ligne ou surface. — Comment, dans cette hypothèse, parvenir à l'équation de cette ligne ou surface?

Nous avons entièrement résolu cette question dans le *Mémoire* inséré au nº de Février 1879, des *Bulletins de l'Academie de Belgique*.

X

SUR DE NOUVEAUX CARACTÈRES DE DÉCOMPOSITION.

PREMIER CARACTÈRE. — *La surface dont on obtient l'équation*

$$\varphi(x, y, z) = 0, \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

en éliminant les paramètres a, b, c *entre les relations :*

$$(A) \begin{cases} U(x, y, z, a, b, c) = 0, & \ldots\ldots \quad (2) \\ V_1(x, y, z, a, b, c) = 0, & \ldots\ldots \quad (3) \\ V_2(x, y, z, a, b, c) = 0, & \ldots\ldots \quad (4) \\ W_1(a, b, c) = 0, & \ldots\ldots \quad (5) \end{cases}$$

se décompose si, en considérant a, b, c *comme coordonnées courantes, les surfaces représentées par les équations* (3, 4, 5) *ont, quelles que soient les valeurs attribuées à* x, y, z, *un nombre* $k + k'$ *de points communs, dont* k *se trouvent constamment sur une courbe plane ou gauche* C *tracée sur la surface* (5).

Comme conséquence de ce nouveau caractère de décomposition, nous avons pu démontrer analytiquement ce théorème si connu dont on ne possédait que des démonstrations géométriques :

THÉORÈME. — *L'ordre de la surface polaire réciproque d'une surface donnée, affectée de points et de lignes multiples, est égal au nombre des points simples que cette surface a en commun avec les premières polaires de deux points quelconques.*

SECOND CARACTÈRE. — *L'équation de la surface définie par les relations :*

$$(A)\ \begin{cases} V_1(x, y, z, a, b, c) = 0, & \ldots\ldots (1) \\ V_2(x, y, z, a, b, c) = 0, & \ldots\ldots (2) \\ U_1(x, y, z, a, b, c) = 0, & \ldots\ldots (3) \\ U_2(x, y, z, a, b, c) = 0, & \ldots\ldots (4) \end{cases}$$

se décompose, s'il arrive qu'en considérant les paramètres variables a, b, c *comme coordonnées courantes, les deux surfaces représentées par les équations* (1, 2) *contiennent, quelles que soient les valeurs attribuées à* x, y, z, *une même courbe* G, *non contenue dans les surfaces représentées par les équations* (3) *et* (4).

XI

NOUVELLE MÉTHODE POUR METTRE EN ÉVIDENCE L'INFLUENCE DES POINTS ET DES LIGNES MULTIPLES SUR LA DÉCOMPOSITION DES LIEUX GÉOMÉTRIQUES.

On peut encore, *dans certains cas particuliers*, par une méthode plus simple que celle que nous venons d'exposer, mettre en évidence l'influence des points et des lignes multiples sur la décomposition des lieux géométriques. Ce nouveau moyen a été exposé p. 14-22 de notre *Mémoire* inséré au *Bulletin*, de février 1879, *de l'Académie de Belgique*.

XII

THÉORÈMES GÉNÉRAUX SUR LA DÉCOMPOSITION DES ENVELOPPES.

(Ce travail qui est sous presse paraîtra dans les *Mémoires de la Société des sciences physiques de Bordeaux*, année 1881.)

XIII

MÉTHODE ANALYTIQUE POUR DÉTERMINER LES SINGULARITÉS ORDINAIRES D'UN LIEU GÉOMÉTRIQUE CONSIDÉRÉ COMME ENVELOPPE D'UNE LIGNE DROITE OU D'UN PLAN.

(Ce travail qui est sous presse paraîtra dans les *Mémoires de la Société des sciences physiques de Bordeaux*, année 1881.)

CHAPITRE II

Méthodes de Géométrie pure.

I

ANALYSE DES TRAVAUX DE CHASLES SUR LES SÉRIES HOMOGRAPHIQUES.

(Ce travail est sous presse.)

II

SUR L'EXTENSION DES SÉRIES HOMOGRAPHIQUES.

Toutes les extensions possibles des séries homographiques sont comprises je crois, dans les k séries définies par l'équation

$$U(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots, \rho_1', \ldots, \rho_k') = 0,$$

séries qui m'ont été suggérées par l'observation de la loi de génération (voir § III, chap. Ier) j'ai résolu, dans les *Mélanges de Géométrie supérieure*, les principaux problèmes que l'on puisse se proposer à leur sujet.

III

APPLICATION DU THÉORÈME DE DESARGUES A LA THÉORIE DES CONIQUES.

L'étude approfondie du théorème de Desargues nous a conduit à une foule de constructions nouvelles développées p. 24-39, 82-85 du Mémoire sur le *Principe arguesien*.

IV

ANALYSE DES TRAVAUX DE PONCELET ET CHASLES SUR LES PRINCIPES DE DUALITÉ ET D'HOMOGRAPHIE.

(Ce travail est sous presse.)

V

SUR LE PRINCIPE ARGUESIEN. (*)

Définition. — Nous avons désigné sous le nom collectif de *Principe arguesien* l'ensemble des trois lois suivantes (**) :

PREMIÈRE LOI. — *Si une courbe plane possède trois points multiples, dont la somme des ordres soit supérieure à son degré, toutes ses propriétés sont rattachées à celles d'une courbe d'ordre inférieur.*

C'est ainsi que, dans les dix premiers degrés, on trouve une *trentaine* de courbes à points multiples *indécomposables*, dont toutes les propriétés sont rattachées à celles des *coniques*, et tout autant dont les propriétés sont rattachées à celles de la courbe du troisième ordre dépourvue du point double.

Parmi les courbes de degré supérieur, dont toutes les propriétés se rattachent aux coniques, et dont nous avons pu formuler, par là même, des *centaines* de résultats nouveaux, nous citerons, en les énumérant dans l'ordre de leurs degrés :

1° *Les Strophoïdes*; 2° *la Cissoïde*; 3° *le Folium de Descartes*; 4° *la Parabole semi-cubique*; 5° *l'Hypocycloïde à trois rebroussements*; 6° *le Limaçon de Pascal*; 7° *la Cardioïde*; 8° *la Lemniscate de Bernoulli*; 9° *la Conchoïde de Nicomède*; 10° *le Scarabée.*

D'une manière générale, la loi en question nous a conduit à classer les courbes algébriques, non plus seulement par leurs degrés, mais encore par *familles* ou *hiérarchies*, se transmettant de proche en proche les propriétés dérivées d'une même courbe de degré inférieur, *base* ou *souche* de la hiérarchie.

Cette loi nous a montré, en effet :

1° *Qu'étant donné* arbitrairement *le degré d'une courbe plane, il existe une ou plusieurs courbes planes* indécomposables, *de ce même degré, assujetties seulement à avoir un certain nombre de points multiples,* arbitrairement distribués, *dont toutes les propriétés sont rattachées à celle d'une courbe d'ordre aussi inférieur que l'on veut ;*

2° *Que, réciproquement, étant donné arbitrairement une courbe indécomposable* Σ, *d'ordre* m, avec ou sans points multiples, *mais la plus générale de son espèce, il existe des courbes* indécomposables, *de degrés aussi élevés que l'on veut, assujetties seulement à avoir un certain nombre de points multiples,* arbitrairement distribués, *dont toutes les propriétés sont rattachées à celles de la courbe* Σ.

Qu'il nous soit permis, à propos de ce résultat, si fécond en conséquences, de rappeler les paroles suivantes, prononcées récemment à l'Académie des sciences de Paris (séance du 7 mai 1877) par M. Chasles :

« On se propose dans toutes les parties des sciences, surtout des sciences physico-chimiques » et des sciences naturelles, de découvrir les lois générales qui président à tous les phénomènes de la nature.

» Ces recherches font des progrès continus, qu'attestent nos *Comptes rendus*, comme ceux

(*) Pour l'origine du mot *arguesien*, qui nous a été suggéré par M. Catalan, voir notre *Mémoire* sur l'application de la transformation arguesienne à la génération des courbes.

(**) Il ne faut pas perdre de vue que ces trois lois transformées par le principe de dualité, donnent également naissance à une classification tangentielle des courbes planes et des surfaces.

» des Académies étrangères; mais, dans les mathématiques se rapportant à la géométrie, on » compte peu de lois générales. »

Citons encore cette autre pensée du grand géomètre :

« Les propositions les plus générales et les plus fécondes sont en même temps les plus sim- » ples et les plus faciles à démontrer. » *Aperçu historique*, p. 337.

Cela dit, donnons les énoncés de la *seconde* et de la *troisième* loi en question qui conduisent, relativement aux surfaces et aux courbes gauches, aux mêmes conséquences que la *première* relativement aux courbes planes.

DEUXIÈME LOI. — *Si une surface possède quatre points multiples, dont la somme des ordres soit supérieure à deux fois son degré, toutes ses propriétés sont rattachées à celles d'une surface d'ordre inférieur.*

TROISIÈME LOI. — *Si une courbe gauche possède quatre points multiples, dont la somme des ordres soit supérieure à son degré, toutes ses propriétés sont rattachées à celles d'une courbe d'ordre inférieur.*

Démonstration du principe arguesien. — Le principe arguesien tel que je viens de le définir a été découvert et mis en lumière en faisant, pendant les vacances de l'année scolaire 1869-70 (*), l'étude complète de ces deux problèmes proposés de *tout temps*, dans les cas particuliers d'une ligne droite Δ et d'un plan π, dans les cours de mathématiques spéciales :

PROBLÈME I. — *En supposant que l'un des deux foyers d'une conique inscrite au triangle* A, B, C, *décrive une courbe* Δ, *on demande d'étudier le lieu décrit par le second foyer.*

PROBLÈME II. — *En supposant que l'un des deux foyers d'une surface de révolution, du second ordre, inscrite au tétraèdre* A, B, C, D, *décrive une courbe* Δ *ou une surface* π, *on demande d'étudier le lieu décrit par le second foyer.*

On ne saurait donc, puisque j'ai été conduit à l'établir par la seule étude approfondie de ces deux problèmes, rattacher l'origine du Principe arguesien à aucune publication étrangère.

Ce serait presque le cas de redire, avec un illustre Géomètre (**) : « L'idée la plus neuve naît souvent d'une idée plus ancienne, dont l'auteur lui-même n'a pas aperçu les conséquences, très-apparentes pourtant quand on les connaît à l'avance. »

NOTA. — Je dois ajouter que le Principe en question peut être établi, pour les courbes planes, par une foule de transformations (***) présentant des avantages respectifs dans la construction et dans la recherche des propriétés métriques. Nous l'avons sur tout développé par l'etude de deux transformations désignées par les noms de *première* et *seconde* transformations arguesiennes

VI

PRICIPALE CONSÉQUENCE DU PRINCIPE ARGUESIEN.

PRINCIPALE CONSÉQUENCE. — *Connaissant le nombre minimum de points nécessaires pour déterminer une courbe ou surface indécomposable donnée* Σ, *on peut en déduire tout de suite le nombre minimum également nécessaire pour déterminer toutes les courbes ou surfaces appartenant à la hiérarchie arguesienne de* Σ. *De plus, ce nombre minimum étant connu, on peut engendrer ces nouvelles courbes ou surfaces par la règle et le compas, si l'on sait décrire, dans les mêmes conditions, la courbe primitive donnée* Σ.

Cette principale conséquence a été surtout développée dans notre Mémoire *sur l'Application de la transformation arguesienne à la génération des courbes et surfaces.*

Voici quelques extraits du rapport fait sur ce travail par un savant géomètre, M. Gilbert :

« On sait les difficultés singulières et presque insurmontables qu'a offertes aux géomètres un

(*) On peut s'en convaincre en lisant la fin de l'Introduction de notre *Mémoire sur l'application de la transformation arguesienne à la génération des courbes.*

(**) BERTRAND. Première page de la Préface du *Traité de calcul différentiel.*

(***) Voir notre *Note sur quelques questions de géométrie*, juillet 1872, Académie de Belgique.

» problème qui paraît, au premier abord, d'une solution facile, celui de la génération et de la » construction, par la règle et le compas, d'une courbe géométrique définie par le plus petit » nombre de points nécessaires à sa détermination. Comme l'a fait remarquer l'illustre auteur » de la *Géométrie supérieure* et du *Traité des sections coniques* (*), bien que ce problème ne » dépende, en analyse, que de la résolution d'un système d'équations du premier degré, non- » seulement la géométrie ne possède point de méthode générale pour le résoudre dans une » courbe d'ordre quelconque, mais il faut descendre de Newton et de Maclaurin, qui l'ont » résolu pour les courbes du troisième et du quatrième ordre remplissant certaines conditions » spéciales, jusqu'aux géomètres de notre temps, pour voir ce problème repris, attaqué de » nouveau avec toutes les ressources de la géométrie moderne, et résolu dans quelques cas » seulement par une suite d'efforts prodigieux. Parmi les plus beaux résultats dont la science » se soit enrichie sur ce terrain ingrat, il faut citer la construction de la courbe du troisième » ordre, déterminée par neuf points simples, dont M. Chasles a donné diverses solutions (**); » celle des courbes du quatrième ordre par des faisceaux de coniques; celle de la surface du » second ordre définie par neuf points, que l'on doit à M. Hesse, et au grand géomètre que je » viens de citer; et enfin, un très-important mémoire de M. Ernest de Jonquières *sur la géné-* » *ration des courbes géométriques, et, en particulier, sur celle de la courbe du quatrième* » *ordre*, dans lequel ce savant a indiqué le moyen de construire les courbes géométriques » d'ordre m à l'aide de faisceaux de courbes d'ordre inférieur. Il importe toutefois de remar- » quer que plusieurs de ces travaux s'écartent des conditions tracées primitivement par Newton, » et qui consistent à n'employer, dans la construction successive et continue des points de la » courbe, que des droites et des cercles.

» C'est à cet ordre de recherches difficiles et méritoires qu'appartient le Mémoire dont j'ai » l'honneur d'entretenir l'Académie :

. . . .

. . . .

» On voit, par cet exposé, que les recherches de M. Saltel se rapportent à une partie impor- » tante et difficile de la géométrie; qu'elles enrichissent cette science de théorèmes et de mé- » thodes qui présentent de la nouveauté et de l'intérêt. Sans prétendre ici marquer le rang » qu'elles doivent occuper dans les nombreux et remarquables travaux de la science contem- » poraine, ce qui demanderait de moi une connaissance préalable beaucoup plus approfondie » de ces travaux, je crois pouvoir dire qu'elles seront vivement appréciées des géomètres, et » je proposerai à l'Académie d'en voter l'impression dans ses recueils. »

Remarque particulière sur les courbes gauches. — La seule circonstance d'avoir démontré *l'existence* d'une infinité de courbes gauches *indécomposables, de degrés aussi élevés que l'on veut*, susceptibles d'être définies uniquement, *sans faire intervenir des surfaces particulières sur lesquelles elles doivent se trouver*, par ce degré et par un nombre suffisant de points simples ou multiples, *pris arbitrairement dans l'espace*, constitue, croyons-nous, un fait nouveau, dans la théorie des courbes gauches. Nous prenons la liberté d'appeler l'attention sur ces remarquables courbes.

VII.

APPLICATIONS DÉVELOPPÉES DU PRINCIPE ARGUESIEN A CERTAINES COURBES PLANES.

Ces applications du principe arguesien présentées, à diverses époques, à l'Académie de Belgique, ont été réunies dans une même brochure publiée sous le titre de : *Mémoire sur le principe arguesien et sur certains systèmes de courbes géométriques*. Je me bornerai encore à reproduire une partie d'un nouveau rapport fait sur ce travail par M. Gilbert.

(*) *Rapport sur les progrès de la géométrie en France*, par M. Chasles, p. 223.

(**) Voir les *Comptes-rendus de l'Académie des sciences de Paris* années 1853 et suivantes.

« I. L'objet du *Mémoire* de M. Saltel est l'application du principe arguesien aux » courbes du troisième ordre pourvues d'un point double, et aux courbes du quatrième ordre » qui ont trois points doubles ; il s'occupe, non-seulement de la construction de ces courbes, » de leurs tangentes, de leurs cercles osculateurs, mais aussi de l'étude de leurs propriétés gé- » nérales déduites du principe arguesien. Ainsi la cubique pourvue d'un point double étant la » transformée d'une conique qui passe par le pôle de tranformation (*), les propriétés générales » de la conique se traduiront en propriétés correspondantes de la cubique à point double. La » courbe du quatrième ordre à trois points doubles étant la transformée d'une conique qui ne » passe point par le pôle de transformation (**), ses propriétés résulteront également des pro- » priétés de cette conique. Par exemple, le théorème de Pascal sur l'hexagone inscrit dans » la conique, ainsi transformée, nous apprend que, si l'on choisit à volonté sept points A, B, » 2, 3, 4, 5, 6 sur une cubique à point double P ; si l'on mène la droite P2 et la conique PAB45 » se coupant en I ; les coniques PAB23 et PAB56 se coupant en K ; la droite P6 et la conique » PAB45 se coupant en L, les points I, K, L seront sur une même conique passant par les points » P, A, B. Je me borne à cette généralisation du théorème de Pascal, mais le prin- » cipe unicursal en fournit beaucoup d'autres, qu'il sera très-intéressant de rapprocher » des autres extensions déjà données à ce théorème célèbre, et en particulier de cel- » les que M. Folie a fait connaître dans son *Mémoire* sur une géométrie supérieure car- » tésienne. Les théorèmes de Desargues, de Brianchon, de Poncelet, de Chasles, fournissent » semblablement des propriétés nouvelles et générales de la cubique à point double.

» II. Ce qui précède fera facilement saisir l'objet du second travail dont j'ai à rendre compte » à l'Académie C'est un supplément au second chapitre du Mémoire de M. Saltel. Pour mieux » faire apprécier la fécondité de sa méthode, et les facilités qu'elle offre pour l'étude des courbes » supérieures, M. Saltel énonce, sans en donner la démonstration ou la solution, *cent* théorèmes » ou problèmes relatifs à la courbe du troisième ordre pourvue d'un point double, les solutions » étant fournies sans difficulté par les propriétes des coniques et le principe arguesien. Ces » théorèmes se rapportent pour la plupart aux intersections ou aux contacts des cubiques ayant » même point double, soit entre elles, soit avec des coniques passant par ce point double et par » deux autres points donnés sur la cubique. Il serait difficile d'en donner une idée plus précise » sans définir ce que l'auteur entend par conique *dérivée* d'un point, point *dérivé* d'une conique, » coniques *conjuguées*, etc.

» III. Une troisième note, présentée à l'Académie dans ses séances du 3 août et du 7 décem- » bre 1872, nous offre pour les courbes du quatrième ordre à trois points doubles une nouvelle » série de *cent* théorèmes généraux, déduits encore des propriétés des coniques par le » principe arguesien. Voici, par exemple, le théorème correspondant à celui de Pascal : » *Soient* 1, 2, 3, 4, 5, 6 *six points pris arbitrairement sur une courbe du quatrième degré* » *pourvue de trois points doubles* P_1, P_2, P_3. *Les trois coniques, respectivement définies par les* » *cinq points*

$$P_1 P_2 P_3 15, \quad P_1 P_2 P_3 25, \quad P_1 P_2 P_3 36,$$

» *se coupent deux à deux en trois points* (indépendamment des points communs P_1, P_2, P_3) » *situés sur une même conique passant aussi par les points doubles* P_1, P_2, P_3.

» Je ne m'arrêterai pas à exposer avec plus de détails cette partie du travail de M. Saltel ; » elle n'est guère susceptible d'analyse : remarquons seulement que ces théorèmes, déjà si » nombreux, pourraient être aisément multipliés par l'application du principe de dualité, ou, » ce qui revient ici au même, par l'emploi de la première loi arguesienne tangentielle. Mais » on appréciera mieux l'importance de cette abondante moisson géométrique, si je rappelle » que les courbes du troisième et du quatrième ordre étudiées ici par M. Saltel comprennent,

(*) Voyez le *Mémoire* de M. Saltel *Sur l'application de la transformation arguesienne*, etc., n° 31.
(**) Voyez le *Mémoire* cité n° 13.

» comme cas particuliers, la *strophoïde*, la *cissoïde de Dioclès*, le *folium de Descartes*, le *limaçon de Pascal*, la *lemniscate de Bernoulli*, l'*hypocycloïde à trois rebroussements*, et diverses » autres courbes célèbres. En sorte que les théorèmes nombreux de M. Saltel constituent autant de propriétés, la plupart nouvelles, la plupart intéressantes, de ces courbes si familières aux géomètres. Qu'on me permette de m'arrêter un instant sur ce point : si nous considérons, par exemple, l'hypocycloïde à trois rebroussements, cette courbe, comme on sait, » est du quatrième ordre et de la troisième classe, douée de trois points doubles qui sont » ses rebroussements ; elle est, de plus doublement tangente à la droite de l'infini, aux points » circulaires. On pourra donc lui appliquer tous les théorèmes de M. Saltel concernant les courbes » du quatrième ordre à trois points doubles, ou les courbes de la troisième classe qui ont une » tangente double, et de là résultent une foule de propriétés nouvelles de cette courbe célèbre. M. Saltel lui a consacré une note spéciale, où, indépendamment de la remarque précédente, il indique plusieurs propriétés fort remarquables de l'hypocycloïde, entre autres les » deux suivantes, que je crois nouvelles, ne les ayant rencontrées ni dans les recherches de » M. Cremona ni dans celles de M. Painvin (*) : *Si l'un des foyers d'une conique inscrite au triangle qui a pour sommets les points de rebroussement de l'hypocycloïde, décrit le cercle inscrit dans ce triangle, l'autre foyer décrira l'hypocycloïde. — Si l'on cherche l'arguesienne triangulaire du cercle inscrit, en prenant pour pôle de transformation un des sommets du triangle, pour axe le côté opposé, pour conique de référence les bissectrices des angles adjacents à ce côté, on trouvera l'hypocycloïde.*

» IV. Enfin, M. Saltel a présenté à l'Académie, dans sa séance du mois de novembre, une » note de quatre pages dans laquelle il étudie un cas particulier de la courbe du quatrième » ordre à trois points doubles : celui où deux de ces points doubles coïncident avec les points » circulaires à l'infini. On sait que la lemniscate de Bernoulli est comprise dans ce cas. Les » constructions générales se simplifient ici en ce que certaines coniques se réduisent à des » cercles. M. Saltel montre comment on construit la courbe par points, lorsqu'elle est définie » par ces points doubles et par cinq autres points ; comment on lui mène la tangente en un » point donné, le cercle osculateur, etc.... Généralisant ces considérations dans l'espace, il » montre comment on construirait par points la surface d'élasticité définie par son point double, une section circulaire, et quatre points, comment on mènerait le plan tangent, etc.

» Terminons là cette longue analyse. Le champ de la géométrie pure a pris aujourd'hui une » extension si démesurée, qu'à moins de faire de cette partie de la science l'objet spécial de ses » études, et ce n'est pas le cas pour moi, il est fort difficile, en face de recherches nouvelles, » d'établir ce qui les distingue et ce qui les rapproche des travaux antérieurs, comme aussi de » préciser l'importance et la direction de leurs applications futures. Mis à l'aise par cette déclaration, je n'hésite pas à dire que les nouvelles communications de M. Louis Saltel sont du plus » sérieux intérêt, et rehaussent encore à mes yeux la valeur de ses précédents travaux. Par la » multitude, l'élégance et la généralité des résultats auxquels il conduit, par la simplicité de la » route où il guide l'intelligence en quête de vérités nouvelles, le Principe arguesien me paraît » appelé à prendre un rang distingué dans cette voie féconde si brillamment ouverte par les » Chasles, les Poncelet, les Steiner, si heureusement poursuivie par MM. Cremona, Mannheim, » de Jonquières, et tant d'autres.

» Je pense donc que le travail de M. Saltel est digne de l'approbation de l'Académie, et j'ai » l'honneur de proposer à la classe :

» 1° De remercier M. Saltel de ses communications, en l'encourageant à poursuivre ses » belles et profondes recherches ;

» 2° De décider que l'*Introduction* et les notes concernant les courbes du troisième et du

(*) Cremona, *Journal de Crelle*, t. LXIV. — Painvin, *Nouvelles Annales de mathématiques*, mai 1870.

» quatrième ordre, ainsi que la note concernant l'hypocycloïde, seront imprimées en même » temps que le second mémoire de M. Saltel, à la place qu'elles doivent logiquement y occu- » per et avec mention de la date de leur présentation à l'Académie ;

» 3° De décider également que la note relative à la surface d'élasticité, et aux courbes du » quatrième ordre qui ont pour points doubles les points circulaires à l'infini, sera imprimée » dans les *Bulletins* de l'Académie. »

» La classe vote les conclusions de ce rapport auxquelles a adhéré M. Catalan, second com- » missaire.

VIII.

EXTENSION DU PRINCIPE DE CORRESPONDANCE ENTRE K SÉRIES DE POINTS AUX COURBES PLANES ET GAUCHES.

(Ce travail est en grande partie sous presse. On peut cependant déjà consulter une note insérée p. 34 de notre mémoire *sur la classification arguesienne des courbes gauches*.)

IX

CONSTRUCTION PAR LES COURBES DES RACINES DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES.

(Voir p. 15-19 de nos *Mélanges de géométrie supérieure*)

X

UNE SURFACE D'ORDRE DONNÉ POSSÈDE UN NOMBRE K DE POINTS MULTIPLES, ET EST LA PLUS GÉNÉRALE DE SON ESPÈCE, TROUVER LE NOMBRE DES POINTS SIMPLES QU'IL FAUT ASSOCIER A CES POINTS MULTIPLES POUR LA DÉTERMINEE.

Après avoir constaté que la formule indiquant qu'un point multiple d'ordre p équivaut à $N = \frac{P(P+1)(P+2)}{1,2,3.}$ points simples n'est pas *toujours* applicable, j'ai indiqué p. 56–66 du Mémoire *sur de nouvelles lois générales régissant les surfaces à points singuliers*) les nouvelles formules qui doivent lui être substituées.

XI

TROIS SURFACES D'OEDRES DONNÈS ONT EN COMMUN K POINTS MULTIPLES, ET SONT LES PLUS GÉNÉRALES DE LEUR ESPÈCE, DÉTERMINER LE NOMBRE DES POINTS SIMPLES QUI LEUR SONT COMMUNS.

Après avoir constaté que la formule habituelle n'est pas *toujours* applicable, j'ai indiqué, p. 36-56 du mémoire cité dans le paragraphe précédent, les nouvelles formules qui doivent lui être substituées.

Voici les énoncés de quelques autres communications qui se rattachent au même sujet :

1° Note sur la détermination des singularités de la courbe d'intersection de deux surfaces (*Comptes-rendus*, 24 Mai 1875. — *Bulletins de l'Académie de Belgique*, Juillet 1875) ;

2° Notes sur les singularités de la surface polaire réciproque d'une surface donnée (*Fontenay-le-Conte*, 4 Juillet 1875. — *Académie de Belgique*, Juillet 1875 et Février 1879, p. 21 du mémoire sur un Paradoxe mathématique.)

XII

ANALYSE DES TRAVAUX DE MM. DE JONQUIÈRES ET CHASLES SUR LES SYSTÈMES DE COURBES.

Ce travail est en grande partie sous presse. On peut cependant déjà consulter nos notes suivantes :

1° Une note insérée, p. 51-55, année 1873, du *Bulletin de la Société Mathématique de France* ;

2° Une note insérée au Bulletin d'Octobre 1876, de l'*Académie de Belgique* ;

3° Une lettre qui nous a été adressée par M. l'Amiral de Jonquières ; lettre publiée à La Rochelle, le 23 Avril 1877.

CHAPITRE III

Recherches diverses. — Énoncés des travaux par ordre chronologique. — Addition.

I

RECHERCHES DIVERSES.

1. *Reflexions sur le volume de la sphère.* — Dans cette Note, insérée dans les Mémoires de la *Société des sciences physiques de Bordeaux*, 1880, je montre d'abord que la voie suivie dans les Traités classiques, pour arriver à mesurer le volume de la sphère, laisse à désirer au point de vue logique. J'indique ensuite une solution qui me semble exempte de tout reproche.

2. *Théorèmes sur les surfaces du second ordre* (*Nouvelles Annales*, 1873).

3. *Sur la détermination des foyers d'une section plane faite dans une surface du second ordre.* — Painvain, t. III des *Nouvelles Annales*, avait déjà résolu cette question. J'ai indiqué dans le tome de l'année 1870, du même recueil, une méthode présentant de notables simplifications algébriques.

4. *Sur les focales d'une surface du second ordre.* — Dans le numéro d'octobre 1873, des *Nouvelles Annales*, j'ai fait observer que la détermination des focales dépend de l'équation du 3me degré désignée dans les cours par le nom d'équation en S.

5 *Nouvelle construction, par la règle et le compas, de la courbe du troisième ordre définie par neuf points.* — *Théorèmes sur les surfaces du troisième ordre.* — Ces questions sont traitées p. 19-32 de mes *Mélanges de Géométrie supérieure.*

6. *Sur la génération des cycliques et cyclides.* — *Bulletin de la Société mathématique de France*, 1875, p. 95-101.

7. *Généralisation du théorème de Desargues aux courbes de tous les ordres* (*Bulletin académique de Belgique*, 1876).

8. *Application du théorème deRolle à la théorie de l'osculation.* — L'objet de cette Note, publiée dans la *Nouvelle correspondance mathématique*, 1880, est de montrer que le théorème de Rolle peut être pris pour base d'une théorie complète et fort simple de l'osculation des courbes planes, et de celles des courbes et surfaces.

9. *Sur le plan osculateur et sur la sphère osculatrice* — Les deux théorèmes suivants, énoncés dans les *Bulletins de la Société mathématique de France*, 1874 :

THÉORÈME Ier. — *Si une surface admet une ligne droite, toutes les courbes de la surface tangentes à cette droite en un de ses points, ont en ce point le même plan osculateur ;*

THÉORÈME II. — *Si une surface admet une section circulaire, toutes les courbes de la surface osculatrices à ce cercle en un de ses points, ont en ce point même sphère osculatrice ;*

permettent de déterminer facilement, dans une foule de cas, le plan osculateur et la sphère osculatrice en un point d'une courbe gauche (Voir *Bul. Acad. Belg.*, 1873).

10. *Étude de la variation du rayon du cercle osculateur en un point d'une section plane d'une surface.* — Ce petit travail inséré dans les *Mémoires de la Société des sciences physiques de Bordeaux*, 1880, a pour objet d'exposer, en prenant uniquement pour base les théories enseignées dans les cours de mathématiques spéciales, un des chapitres les plus importants de l'étude des surfaces, chapitre relégué à la fin des cours de calcul différentiel.

11. *Contribution à la théorie du changement des variables dans le calcul des intégrales multiples.* — Ce travail qui est sous presse a pour objet de montrer la nécessité de faire intervenir des considérations géométriques dans la solution du problème de la détermination des nouvelles limites qui correspondent à un changement des variables dans les intégrales multiples.

II.

ÉNONCÉS DES TRAVAUX PAR ORDRE CHRONOLOGIQUE.

1. Composition de l'ecole normale 1869. (*Nouvelles Annales de mathématiques*, 1869.) — 2. Généralisation du problème proposé au concours général en 1866. (*Journ. des élèves de mathém. spéc.* 1870.) — 3. Sur la détermination des foyers d'une section plane faite dans une surface du second ordre. (*Nouvelles Annales*, 1870). — 4. Théorème sur les surfaces du second ordre. (*Nouvelles Annales*, 1871). — 5. Extrait d'une lettre de M. Louis Saltel à M. Catalan. (*Bull. de l'Acad. roy. de Belg.* 1871; — *Nouvelles Annales*, 1872; — *Journ. de l'Institut*, 1872.) — 6. Mémoire sur l'application de la transformation arguesienne à la génération des courbes et surfaces géométriques. (*Mém. de l'Acad. de Belg.* 1872).— 7. Sur quelques questions de géométrie. (*Bull. de l'Acad. de Belg.* 1872.)— 8. Mémoire sur le principe arguesien unicursal et sur certains systèmes de courbes géométriques (*Mém. de l'Acad. de Belg.* 1872.) — 9. Sur la surface d'élasticité (*Bull. de l'Acad. de Belg.* 1873.) — 10. Sur la sphère osculatrice et sur les surfaces à points multiples. (*Bull. de l'Acad. de Belg.*, 1873.) — 11. Théorèmes sur les courbes et surfaces du second ordre. (*Nouvelles Annales*. 1873.) — 12. Détermination des focales dans une surface du second ordre. (*Nouvelles Annales*, 1873.) — 13. Généralisation du principe de correspondance de M. Chasles, et son application à la théorie de l'élimination. (*Nouvelles Annales*, 1873.) — 14. Sur la détermination des caractéristiques dans les courbes d'ordre supérieur. (*Bull de la Société mathém de France*, 1874.) — 15. Sur le plan osculateur et sur la sphère osculatrice. (*Bull. de la Société mathém. de France*, 1874) — 16. Considérations générales sur la détermination, sans calcul, de l'ordre d'un lieu géométrique. (*Mém. de l'Acad. de Belg.*, 1874.) — 17. Mémoires sur de nouvelles lois générales régissant les surfaces à points singuliers. (*Mém. de l'Acad. de Belg*, 1875.) — 18. Théorèmes sur les courbes et les surfaces du troisième ordre. (*Nouv. corresp. mathém.*, 1875). — 19. Sur la génération des cycliques et cyclides. (*Bull. de la Société mathém. de France*, 1875.) — 20. — Sur les foyers des cycliques. (*Bull. de la Société mathém. de France*, 1875.) — 21. Sur une extension analytique du principe de correspondance de M. Chasles. (*Comptes-rendus*, 1875). Cette note a été complétée dans un tirage à part. — 22. Mélanges de géométrie supérieure. (*Mém. de l'Acad. de Belg.*, 1875.) — 23. Sur la détermination des singularités de la courbe gauche, intersection de deux surfaces d'ordres quelconques qui ont en commun un certain nombre de points multiples. (*Comptes-rendus*, 1875.)—24. Sur des courbes gauches du genre zéro. (*Comptes-rendus*, 1875.) — 25. Sur la détermination analytique du centre d'une section plane faite dans une surface du second ordre. (*Nouvelles Annales* 1875.) — 26. Sur la détermination des singularités de la courbe d'intersection de deux surfaces qui ont en commun M points multiples, M étant égal ou inférieur à 4. (*Bull. de l'Acad. de Belg.*, 1875.) — 27. Détermination dans la surface réciproque d'une surface S douée de points multiples, du degré de la courbe double et de celui de la courbe de rebroussement. (*Bull. de l'Acad. de Belg.*, 1875.) — 28. *Influence des points multiples sur le degré de la courbe de rebroussement de la polaire réciproque d'une surface donnée.* (Fontenay-le-Conte, 1875.) — 29. Sur les courbes du quatrième ordre à trois points doubles. (*Nouv. corresp. mathém.* 1875.) — 30. Application du principe de correspondance analytique à la démonstration du théorème de Bezout. (*Comptes-rendus*, 1875.) — 31. Application d'un théorème, complémentaire du principe de correspondance, à la détermination, sans calcul, de l'ordre de multiplicité d'un point O, qui est un point multiple d'un lieu géométrique donné. (*Comptes-rendus*, 1875.) — 32. Détermination, par le principe de correspondance analytique de l'ordre d'un lieu géométrique défini par des conditions algébriques. (*Comptes-rendus*, 1876.) — 33. Généralisation du théorème de Desargues. (*Bull. Acad. de Belg.*, 1876.) — 34. Sur une loi générale de décomposition *Bull. Acad. de Belg.*, 1876.) — 35. Nouvelle méthode pour déterminer l'ordre d'un lieu géométrique défini par des conditions algébriques. (*Bull. Acad. de Belg.*, 1876.) — 36. Rectification à une communication précédente. (*Comptes-rendus*, 1876.) — 37. Détermination, par la méthode de correspondance analytique, de l'ordre de l'enveloppe d'une courbe ou surface. (*Comptes-rendus*, 1876.) — 38. Application de la loi de décomposition. (*Bull. Acad. de Belg.*, 1876.) — 39. Sur la formule indiquant le nombre des coniques d'un système satisfaisant à une cinquième condition. (*Bull. Acad. de Belg.* 1876.) — 40. Seconde communication sur la détermination de l'ordre d'une surface enveloppe. (*Comptes-rendus*, 1876.) — 41. Note historique sur deux Mémoires publiés dans le *Bull. Acad. de Belg.*, (La Rochelle, 1877.) — 42. Détermination, par la méthode de correspondance analytique, de l'ordre d'une surface enveloppe. (*Bull. Acad. de Belg.*, 1877.) — 43.

Theorèmes sur les courbes gauches. (*Bull. Acad. de Belg.*, 1877.) — 44. Sur le lieu des centres des sphères osculatrices d'une courbe gauche. (*Bull. Acad. de Belg.*, 1877.) — 45. Théorème sur les arguesiennes. (*Bull Acad. de Belg.*, 1877.) — 46. Thèse de doctorat. — Lettre de M. l'amiral de Jonquières à M. Saltel. (La Rochelle 1877.) — 47. Sur les nouveaux développements que comporte la methode de correspondance analytique. (*Bull. Acad. de Belg.*, 1878.) — 48. Memoire sur la classification arguesienne des courbes gauches. (*Bull. Acad. de Belg.*, 1878.) — 49. Memoire sur un paradoxe mathematique. (*Bull. Acad. de Belg.*, 1879.) — 50. Sur la détermination du nombre des points doubles d'un lieu défini par des conditions algébriques. (*Comptes-rendus*, 1879.) — 51. Lettre de M. Catalan sur l'origine du principe arguesien. (*Nouv. corresp. mathem.*, 1879.) — 52. Historique et developpement d'une methode pour determiner les singularités ordinaires d'un lieu defini par des conditions algebriques. (*Bull. Acad. de Belg.* 1879.) — 53. Application du theorème de Rolle à la theorie de l'osculation. (*Nouv. corresp. mathem.*, 1880.) — 54. Conférences de geometrie supérieure faites à la Faculte des sciences de Bordeaux. (*Mém. de la Société des sciences phys. de Bord.*, 1880.) — 55. Reflexions sur le volume de la sphère. (*Mém. de la Société des sciences phys. de Bord.*, 1880.) — 56. Etude de la variation du rayon du cercle osculateur en un point d'une section plane. (*Mém. de la Société des sciences phys. de Bordeaux.*) — 57. Methode analytique pour determiner toutes les singularités d'un lieu considéré comme enveloppe d'une droite ou d'un plan (*sous presse*). — 58. Sur les arcs rectifiables de certaines courbes algebriques (*sous presse*). — 59-60. Contribution à la théorie du changement des variables dans le calcul des integrales simples et multiples, et à la theorie des solutions singulières des equations differentielles (*sous presse*).

§. III — ADDITION.

Si la loi énoncée par induction dans le *nota* du § IV du chapitre Ier est entièrement générale, les ***points d'inflexions,*** d'un lieu plan défini par k équations, doivent s'obtenir en associant à ces équations la relation

$$\begin{vmatrix} \frac{dP_1}{dx} & \frac{dP_1}{dy} & \frac{dP_1}{dt} \\ \frac{dP_2}{dx} & \frac{dP_2}{dy} & \frac{dP_2}{dt} \\ \frac{dP_3}{dx} & \frac{dP_3}{dy} & \frac{dP_3}{dt} \end{vmatrix} = 0,$$

dans laquelle les expressions P_1, P_2, P_3, représentent les déterminants qui sont les coefficients de notre équation *réduite* de la tangente en un point du lieu. (Voir ***Historique et développement*** etc, p. 37.)

De même la courbe ***parabolique*** d'une surface, définie par k équations, doit s'obtenir en associant à ces équations la relation

$$\begin{vmatrix} \frac{dP_1}{dx} & \frac{dP_1}{dy} & \frac{dP_1}{dz} & \frac{dP_1}{dt} \\ \frac{dP_2}{dx} & \frac{dP_2}{dy} & \frac{dP_2}{dz} & \frac{dP_2}{dt} \\ \frac{dP_3}{dx} & \frac{dP_3}{dy} & \frac{dP_3}{dz} & \frac{dP_3}{dt} \\ \frac{dP_4}{dx} & \frac{dP_4}{dy} & \frac{dP_4}{dz} & \frac{dP_4}{dt} \end{vmatrix} = 0.$$

dans laquelle les expressions P_1, P_2, P_3, P_4, représentent les déterminants qui sont les coefficients de notre équation *réduite* du plan tangent en un point du lieu. (Voir ***Historique et developpement***, etc., p. 42.)

NOTA. — Tous ceux qui savent quel grand rôle joue le *Hessien* dans la theorie d'une courbe ou surface définie par *une seule équation*, jugeront, sans peine, combien serait importante la démonstration rigoureuse des résultats que nous venons d'énoncer.